Πρόταση 1

Έστω $U \subset \mathbb{R}^n$, $\bar{x} \in \mathbb{R}^n$. $\bar{x} \in U' \Leftrightarrow \exists (x_\nu) \subset U \setminus \{\bar{x}\} : \bar{x}_\nu \to \bar{x}$.

Απόδειξη:

Σύμφωνα με τον ορισμό, το $\bar{x}$ είναι σ. συσσώρευσης του U, αν για κάθε $\varepsilon > 0$: $U \cap B(\bar{x}, \varepsilon) \setminus \{\bar{x}\} \neq \emptyset$.

$(\Rightarrow)$ $\forall \nu \in \mathbb{N}$ $\exists \bar{x}_\nu \in U \setminus \{\bar{x}\}$: $\|x_\nu - \bar{x}\| < \frac{1}{\nu} \Rightarrow \bar{x}_\nu \to \bar{x}$.

Από την άλλη, αν υπάρχει ακολουθία, $(\bar{x}_\nu) \subset U \setminus \{\bar{x}\}$ με $\bar{x}_\nu \to \bar{x}$

$(\Leftarrow)$ $\forall \varepsilon > 0$ $\exists \nu_0 \in \mathbb{N}$ με $\|\bar{x}_{\nu_0} - \bar{x}\| < \varepsilon \Rightarrow x_{\nu_0} \in U \cap B(\bar{x}, \varepsilon) \setminus \{\bar{x}\} \neq \emptyset$

Πρόταση 2

Έστω $U \subset \mathbb{R}^n$ και $\bar{x} \in \mathbb{R}^n$ $\bar{x} \in \underbrace{\bar{U}}_{= U \cup U'} \Leftrightarrow \exists (\bar{x}_\nu) \subset U : \bar{x}_\nu \to \bar{x}$.

Απόδειξη:

Έχουμε $\bar{U} = U \cup U'$. Συνεπώς, αν $\bar{x} \in U$, η σταθερή ακολουθία $\bar{x}_\nu = \bar{x} \to \bar{x}$. Αν $\bar{x} \in U'$, τότε $\exists (\bar{x}_\nu) \subset U \setminus \{\bar{x}\} \subset U : \bar{x}_\nu \to \bar{x}$

Από την πρόταση 1.

Έστω τώρα $(\bar{x}_\nu) \subset U$ με $\bar{x}_\nu \to \bar{x}$. Αν υπάρχει κάποιο $\nu \in \mathbb{N}$ $\bar{x}_\nu = \bar{x} \in U$. Αν $\forall \nu \in \mathbb{N}$ $\bar{x}_\nu \neq \bar{x}$, τότε: $(\bar{x}_\nu) \in U \setminus \{\bar{x}\}$ και αφού $\bar{x}_\nu \to \bar{x}$, από την Πρόταση 1, έχουμε $\bar{x} \in U'$

Πρόταση 3

$U \subset \mathbb{R}^n$ κλειστό $\Leftrightarrow \forall : (\bar{x}_\nu) \subset U$ που ισχύει : $\bar{x}_\nu \to \bar{x} \in \mathbb{R}^n$: $\bar{x} \in U$.

Απόδειξη:

$(\Rightarrow)$ $\underbrace{U \text{ κλειστό}}_{\Leftrightarrow U = \bar{U}}$ και $(\bar{x}_\nu) \subset U$, $\bar{x}_\nu \to \bar{x} \xrightarrow[\text{πρόταση 2}]{} \bar{x} \in \bar{U} = U$: $\bar{x} \in U$

$(\Leftarrow)$ Έστω $\bar{x} \in \bar{U}$, τότε υπάρχει $(\bar{x}_\nu) \subset U$, $\bar{x}_\nu \to \bar{x}$ (Πρόταση 2) $\Rightarrow$

$\xrightarrow[\text{υπόθεση}]{} \bar{x} \in U$

(άρα $\bar{U} \subset U \Rightarrow U$ κλειστό).

Πρόταση 4

$U \subset \mathbb{R}^n$ συμπαγές $\Leftrightarrow \forall (\bar{x}_\nu) \subset U \quad \exists (\bar{x}_{k_\nu}) \subset (\bar{x}_\nu)$ και $\bar{x} \in U$
$\bar{x}_{k_\nu} \to \bar{x}$.

Απόδειξη:

($\Rightarrow$) Έστω $(\bar{x}_\nu) \subset U$. Αφού το U είναι συμπαγές είναι και φραγμένο $\underset{\substack{\text{U κλειστό} \\ \text{Πρόταση 3}}}{\Rightarrow}$ $(\bar{x}_\nu)$ είναι φραγμένη $\underset{BW}{\Rightarrow}$ $\exists (\bar{x}_{k_\nu}) \subset (\bar{x}_\nu)$: $\bar{x}_{k_\nu} \to \bar{x} \in \mathbb{R}^n$

($\Leftarrow$): Θ.ν.δ.ο. : U κλειστό και φραγμένο. Έστω ότι το U δεν είναι φραγμένο
($\Rightarrow$) Τότε για κάθε $\nu \in \mathbb{N}$: $\exists \bar{x}_\nu \in U$, $\|\bar{x}_\nu\| \geq \nu$. ($\to \infty$).
Για κάθε υπακολουθία $(\bar{x}_{k_\nu}) \subset (\bar{x}_\nu)$ ισχύει $\|\bar{x}_{k_\nu}\| \geq k_\nu \geq \nu$,
δλδ η υπακολουθία (x_{k_ν}) δεν είναι φραγμένη, άρα ούτε και συγκλίνουσα, το οποίο είναι άτοπο προς την υπόθεση.

Συνεπώς το U είναι φραγμένο.

Έστω τώρα $(\bar{x}_\nu) \subset U$, $\bar{x}_\nu \to \bar{x} \in \mathbb{R}^n$.
Τότε για κάθε υπακολουθία (x_{k_ν}) ισχύει $\bar{x}_{k_\nu} \to \bar{x} \in \mathbb{R}^n \underset{\text{υπόθεση}}{\Longrightarrow} x \in U$

Συνεπώς (Πρόταση 3), το U είναι κλειστό

Πρόταση 5

$U \subset \mathbb{R}^n$ συμπαγές.

$\bar{f}: U \to \mathbb{R}^m$ συνεχής

Τότε $\bar{f}(U) \subset \mathbb{R}^m$ είναι συμπαγής.

Απόδειξη : Έστω $(y_\nu) \subset \bar{f}(U)$

$\Rightarrow \bar{y}_\nu = \bar{f}(\bar{x}_\nu)$, $\bar{x}_\nu \in U$.

$\Rightarrow \exists (\bar{x}_{k_\nu}) \subset U : \bar{x}_{k_\nu} \to \bar{x} \in U$.

$\underset{f \text{ συνεχής}}{\Longrightarrow} \bar{y}_{k_\nu} = \bar{f}(\bar{x}_{k_\nu}) \to \bar{f}(\bar{x}) \in \bar{f}(U)$

Θεώρημα

(Η συνεχής εικόνα συμπαγούς συνόλου, είναι συμπαγής)

Έστω $U \subset \mathbb{R}^n$ $\underbrace{\text{συμπαγές}}_{\text{κλειστό/φραγμένο}}$, $\bar{f} : U \to \mathbb{R}^m$ συνεχής.

Τότε $\bar{f}(U) \subset \mathbb{R}^m$ συμπαγές.

Πόρισμα: Έστω $f : U \to \mathbb{R}$ συνεχής, $U \subset \mathbb{R}^n$ συμπαγές.

Τότε $f(U) \subset \mathbb{R}$ είναι συμπαγές και ειδικότερα, λαμβάνει μέγιστο και ελάχιστο.
Δηλαδή $\exists\, \bar{x}_1 \in U, \bar{x}_2 \in U : \forall\, \bar{x} \in U,\ f(\bar{x}) \in [f(\bar{x}_1), f(\bar{x}_2)]$
με $\bar{x}_1$ σημείο (ολικού) ελαχίστου, $\bar{x}_2$ σημείο (ολικού) μεγίστου και $f(\bar{x}_1)$ ελάχιστο και $f(\bar{x}_2)$ μέγιστο.

Απόδ

Το ότι το $f(U)$ είναι συμπαγές στο $\mathbb{R}$, προκύπτει από την πρόταση 5 (για $m=1$).
Έτσι, $f(U) \subset \mathbb{R}$ κλειστό και φραγμένο.
Από ΑΠ.1 (πληρότητα) $\Longrightarrow$ $\exists\, y_m \in f(U) : y_m = \inf f(U)$

$\exists\, y_M \in f(U) : y_M = \sup f(U)$

(δηλαδή $f(U) \subset \mathbb{R}$ φραγμένο, έπεται ότι $\exists\, \inf f(U), \sup f(U) \in \mathbb{R}$.)

Είναι:

$\inf f = \inf f(U) := \inf\{f(\bar{x}),\ \bar{x}\in U\}$,

δηλαδή $\forall\ \nu\in\mathbb{N}\ \exists\ \bar{x}_\nu\in U:\ \inf f \leq f(\bar{x}_\nu) < \inf f + \frac{1}{\nu}$

Από θεώρημα ισοσυγκλινουσών ακολουθιών

$f(\bar{x}_\nu) \to \inf f$.

Αφού $f(U)$ κλειστό $\Longrightarrow \inf f \in f(U)$, δηλαδή

$\inf f = \min f = f(\bar{x}_m)$, για κάποιο $\bar{x}_m \in U$.

Ομοίως, $\forall\ \nu\in\mathbb{N}\ \exists\ \bar{y}_\nu\in U:\ \sup f - \frac{1}{\nu} < f(\bar{y}_\nu) \leq \sup f$

, άρα $f(\bar{y}_\nu) \to \sup f$, και ομοίως με παραπάνω

$\exists\ \bar{y}_m \in U : \sup f = \max f = f(\bar{y}_m)$.

Διαφόριση

• Μερικές Παράγωγοι πραγματικής συνάρτησης.

Ορισμός: Έστω $f: U \to \mathbb{R}$, $U \subset \mathbb{R}^n$, U ανοιχτό (καθε $\bar{x} \in U$ είναι ε.σ).

Η f καλείται μερικώς διαφορίσιμη στο $\bar{x} \in U$, ως προς την i-οστή μεταβλητή, αν υπάρχει το όριο:

$$\lim_{h \to 0} \frac{f(\bar{x} + h\bar{e}_i) - f(\bar{x})}{h} := \frac{\partial f}{\partial x_i}(\bar{x}),$$

όπου $\bar{e}_i = (0, \ldots, 0, \underset{\substack{\downarrow \\ i\text{-οστή} \\ \text{θέση}}}{1}, 0, \ldots, 0)$

Παράδειγμα

Για $n=2$: $f: U \to \mathbb{R}$, $U \subset \mathbb{R}^2$, U ανοιχτό, είναι μερικώς διαφορίσιμη στο (x,y) ως προς τη μεταβλητή x, αν υπάρχει το όριο

1η μεταβλητή

$$\lim_{h \to 0} \frac{f(x+h, y) - f(x,y)}{h} = \frac{\partial f}{\partial x}(x,y)$$